XI Suites et séries de fonctions

XI.A Questions de cours :

1)

2)

3)

XI.B Exercices :

Exercice 1: *

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose
$$f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que la convergence est en réalité uniforme sur $[0,+\infty[$.

Exercice 2: **

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$
Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.
3. Soit $a \in]0,1[$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.

Exercice 3: **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

Exercice 4: ***

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Prouver que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
4. Déterminer $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s)$.
5. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

   En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.

Exercice 5: ***

Soit f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ à déterminer.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition et que sa restriction à $]a, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. f est-elle dérivable en a ?

Exercice 6: *

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Exercice 7: **

On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 8: *

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Exercice 9: **

On considère la série de fonctions de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
2. Calculer $S'(1)$.